Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
Р. Десн __________ В.Н. Деснянский
«01» декабря 2025 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2025-2026 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс
Вариант 1

Задание №1

Найдите наименьшее значение z, если

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$$

Задание №2

Доказать, что для любого x имеет место неравенство:

$$a^{2x} \leq \frac{1}{3}(1 + 2a^{3x})(a > 0)$$

Задание №3

Решить уравнение: $\cos x + \cos^2 x + \sin^3 x = 0$

Задание №4

Решить неравенство:

$$\frac{(|x-2| - 4 - x^2)\left(|x+4| - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)}{(|1-x| - 4)(|x+3| - |x-5|)} > 0$$

Задание №5

Определить какое из чисел больше $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ или 3? Ответ должен быть обоснован.

Задание №6

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (не обязательно прямоугольном) оказалось, что $\angle CAA_1 = 90^\circ$ и $CB_1 = AD$. Докажите, что $\angle DB_1B = 90^\circ$

Задание №7

В остроугольном треугольнике стороны a и b равны 5 и 11. Найти проекцию третьей стороны c на сторону a, если известно, что длина c есть нечетное число.

Задание №8

Доказать, не используя калькулятор, что первые три десятичных знака после запятой, в числе $\left(\sqrt{65}+8\right)^3$ равны нулю.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_______________ В.Н. Деснянский
«01» декабря 2025 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР» ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2025-2026 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс

Вариант 2

Задание №1

Найдите наименьшее значение Z, если

$$z = 4x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x - 2y + 5$$

Задание №2

Доказать, что для любых x, y ≥ 0 имеет место неравенство:

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x - \sqrt{xy} + y)^2$$

Задание №3

Решить уравнение: $\tan^2 x \tan^2 3x \tan 4x = \tan^2 x - \tan^2 3x + \tan 4x$

Задание №4

Решить неравенство:

$$x^2 2^{2x} + 9(x+2)2^x + 8x^2 \leq (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16$$

Задание №5

Какое из чисел больше: $3\sqrt[3]{33}$ или $\sqrt{58} + 2$? Ответ обосновать!

Задание №6

Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 2, 3, 5 и 11? Ответ обосновать!

Задание №7

В остроугольном треугольнике стороны a и b равны соответственно 3 и 5. Найти периметр этого треугольника, если известно, что третья сторона c является нечетным числом.

Задание №8

Доказать, не используя калькулятор, что первые пять десятичных знаков после запятой, в числе $\frac{1}{\left(\sqrt{65}-8\right)^5}$ равны нулю.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_____________ В.Н. Деснянский
«01» декабря 2025 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2025-2026 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс

Вариант 3

Задание №1

Найдите наименьшее значение Z, если

$$z = x^2 - 4xy + 5y^2 - 12y + 4x + 11$$

Задание №2

Даны положительные числа x, y, z удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{xyz} = xy + xz + yz$$

Докажите, что $x + y + z \leq \frac{1}{3}$

Задание №3

Решить уравнение: $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

Задание №4

Решить неравенство:

$$\frac{1 - 2^x}{\sqrt{1 - 4^x} + 2^x - 1} + \frac{\sqrt{1 + 2^x}}{\sqrt{1 + 2^x} - \sqrt{1 - 2^x}} \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 4^x}}{2^x}$$

Задание №5

Определите, какое из чисел больше: $3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ или $\sqrt{34} + \sqrt{3,1}$? Ответ обосновать.

Задание №6

В тетраэдре ABCD медиана AE грани ABC перпендикулярна ребру BD, а медиана AF грани ABD перпендикулярна ребру BC. Докажите, что ребро AB перпендикулярно ребру CD.

Задание №7

В остроугольном треугольнике стороны a и b равны 4 и 8. Доказать, что треугольник равнобедренный, если длина стороны c четное число.

Задание №8

Доказать, не используя калькулятор, что первые три десятичных знаков после запятой в числе $\frac{1}{\left(\sqrt{82}-9\right)^3}$ равны нулю.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
________________В.Н. Деснянский
«01» декабря 2025 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2025-2026 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-11 класс

Вариант 4

Задание №1

Найдите наименьшее значение Z, если

$$z = 2x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3$$

Задание №2

Даны числа $x > y > 0$. Известно, что $xy \geq 1$.

Докажите, что $\frac{x^3+y^3}{x-y} > 4$

Задание №3

Решить уравнение: $\sin x\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x}\right) = 1$

Задание №4

Решить неравенство:

$$\frac{\left((x^2+x+1)^{\frac{x+2}{x+3}} - (x^2+x+1)^2\right)\log_{x^2}(x+100)}{\left(\sqrt{x^2-x} - 1 - x^2\right)(|2x-1| - 6)} > 0$$

Задание №5

Какое из чисел больше: $\frac{8-\sqrt{85}}{3}$ или $\frac{27-4\sqrt{66}}{9}$? Ответ обосновать.

Задание №6

Пусть в пирамиде ABCD все плоские углы при вершине D — прямые. Доказать, что $s_{ABC}^2 = s_{ABD}^2 + s_{BCD}^2 + s_{CAD}^2$, где S – площадь соответствующей грани пирамиды.

Задание №7

В остроугольном треугольнике стороны a и b равны соответственно 1 и 2. Найти площадь этого треугольника, если третья сторона c натуральное число.

Задание №8

Доказать, не используя калькулятор, что первые семь десятичных знаков после запятой в числе $(\sqrt{26} + 5)^7$ равны нулю.